L2 - Psychologie 2019-2020 - Trois exercices sur les tests paramétriques de comparaison

Novembre 2019

Cette feuille d'exercices comporte en vérité quatre type d'exercices : comparaison de proportions, comparaison d'écart-types, comparaison de moyennes pour des échantillons indépendants, et comparaison de moyennes de petits échantillons appariés. L'exercice 2 est un exercice de comparaison de moyennes précédé d'un exercice de comparaison d'écart-types.

Exercice 1 (comparaison de proportions. Fracures françaises, IPSOS 2019)**.** Lors d'une enquête, menée en 2014 sur 450 français, 382 estimaient que la France était en déclin. A la même question posée en août 2019 à 390 personnes, 285 estimaient que le France était en déclin.

Peut-on en conclure, à l'aide d'un test d'hypothèse avec un niveau d'erreur de 5%, que la proportion de "déclinistes" français a baissé entre 2014 et aujourd'hui ?

Exercice 2 (comparaison de moyennes, grands échantillons indépendants)**.** On fait passer un test psychométrique à deux groupes de volontaires, appelés Groupe A et Groupe B, représentant respectivement les populations A et B. Les résultats sont les suivants :

Résultats	$[55, 57[$	$[57, 59[$	$[59, 61[$	$[61, 63[$	$[63, 65]$
Effectifs Groupe A	9	10	7	7	12
Effectifs Groupe B	20	9	10	4	8

1. En supposant la normalité des variables aléatoires qui représentent les scores des deux populations, à l'aide d'un test paramétrique au niveau 5%, comparer les écarts-type des scores des deux populations A et B.
2. Au vu des résultats des deux échantillons, au niveau $\alpha = 5\%$, peut-on considérer que le score moyen de la population B est inférieur au score moyen de la population A ?

Exercice 3 (petits échantillons appariés)**.** Un groupe de 10 sujets entreprend sur une période de six mois un programme d'enrichissement cognitif destiné à améliorer leurs processus de traitement de l'information. Pour évaluer l'effet du programme, on fait passer aux sujets deux tests de niveaux comparables l'un avant, l'autre après la période d'apprentissage, dont voici les scores :

Scores AVANT	5	2	8	9	5	3	2
Scores APRÈS	6	2	9	10	6	1	3
D							

A l'aide d'un test paramétrique de comparaison, décider au niveau $\alpha = 5\%$ si les sujets ont en moyenne amélioré leur processus de traitement de l'information après le programme d'enrichissement cognitif.

Corrigé de l'Exercice 1. Lors d'une enquête, menée en 2014 sur 450 français, 382 estimaient que la France était en déclin. A la même question posée en août 2019 à 390 personnes, 285 estimaient que le France était en déclin.

Peut-on en conclure, à l'aide d'un test d'hypothèse avec un niveau d'erreur de 5%, que la proportion de "déclinistes" français a baissé entre 2014 et aujourd'hui ?

On procède à un test *orienté* de comparaison des proportions. On désigne par p_A la proportion de "déclinistes" français en 2014, et par p_B la proportion de déclinistes français en 2019.
Hypothèses. $H_0 : p_A = p_B$. $H_1 : p_A > p_B$.
Statistiques du test. Les effectifs sont $n_A = 450$ et $n_B = 390$. Ils sont supérieurs à 30, donc on travaille avec de grands échantillons. Les proportions expérimentales sont $p_A^{\mathrm{e}} = \dfrac{382}{450} = 0.849$ et $p_B^{\mathrm{e}} = \dfrac{285}{390} = 0.731$. On en déduit les nombres :

$$p_0 = \frac{n_A p_A^{\mathrm{e}} + n_B p_B^{\mathrm{e}}}{n_A + n_B} = 0.794,\ q_0 = 1 - p_0 = 0.206 \text{ et } s_0 = \sqrt{p_0 q_0 \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)} = 0.0279.$$

Sous l'hypothèse nulle, la différence $P_{n,A} - P_{n,B}$ des proportions aléatoires des déclinistes français de 2014 et 2019 vérifie :

$$P_{n,A} - P_{n,B} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, s_0),\ \text{donc } P_{n,A} - P_{n,B} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 0.0279).$$

Région critique K_α au niveau $\alpha = 0.05$. On détermine, avec la fonction invNorm de la calculatrice, le nombre p_α tel que $\mathbb{P}[P_{n,A} - P_{n,B} \geq p_\alpha] = 0.05$. En effet, l'hypothèse H_1, qui dit que le nombre de déclinistes à baissé, sera validée lorsque $P_{n,A}$ est beaucoup plus grand que $P_{n,B}$, c'est-à-dire lorsque $P_{n,A} - P_{n,B}$ est "très positif". On trouve $p_\alpha = 0.046$. Donc $K_\alpha = \{P_{n,A} - P_{n,B} \geq 0.046\}$.
Décision du test au niveau $\alpha = 0.05$. La valeur expérimentale est $p_A^{\mathrm{e}} - p_B^{\mathrm{e}} = 0.849 - 0.731 = 0.118$. Elle appartient à K_α, donc, au niveau d'erreur $\alpha = 5\%$, on accepte l'hypothèse H_1 : les français sont moins déclinistes aujourd'hui qu'ils ne l'étaient en 2014.

Corrigé de l'Exercice 2. On fait passer un test psychométrique à deux groupes de volontaires, appelés Groupe A et Groupe B, représentant respectivement les populations A et B. Les résultats sont les suivants :

Résultats	$[55, 57[$	$[57, 59[$	$[59, 61[$	$[61, 63[$	$[63, 65]$
Effectifs Groupe A	9	10	7	7	12
Effectifs Groupe B	20	9	10	4	8

1. En supposant la normalité des variables aléatoires qui représentent les scores des deux populations, à l'aide d'un test paramétrique au niveau 5%, comparer les écarts-type des scores des deux populations A et B. On procède à un test paramétrique ***bilatéral*** de comparaison des écarts-type. On désigne par σ_A et σ_B les écarts-type des scores des deux populations A et B.
   Hypothèses. $H_0 : \sigma_A = \sigma_B$, $H_1 : \sigma_A \neq \sigma_B$. On procède donc un test bilatéral de comparaison des écarts-types.
   Statistique du test. A l'aide de la calculatrice, on calcule les écarts-type corrigés des scores des deux échantillons :

   $$\widehat{s}_A^{\mathrm{e}} = 3.027,\ \widehat{s}_B^{\mathrm{e}} = 2.946.$$

   On voit que $\widehat{s}_A^{\mathrm{e}} > \widehat{s}_B^{\mathrm{e}}$ (c'est donc la variance aléatoire corrigée de la population A qu'on met au numérateur de la variable aléatoire F). Ainsi, sous l'hypothèse nulle, le quotient F des deux variances aléatoires corrigées $\widehat{V}_{A,n_A} = \widehat{S}^2_{A,n_A}$ et $\widehat{V}_{B,n_B} = \widehat{S}^2_{B,n_B}$ vérifie :

   $$F = \frac{\widehat{S}^2_{A,n_A}}{\widehat{S}^2_{B,n_B}} \hookrightarrow \mathrm{FS}(n_A - 1, n_B - 1) = \mathrm{FS}(44, 50).$$

   Région critique K_α au niveau $\alpha = 0.05$. Dans la table de la Loi de Fisher-Snedecor avec $\alpha = 0.025$ (car on fait un test ***bilatéral***), on voit sur cette table que f_α est compris entre 1.77 et 1.78. On a $K_\alpha^+ = \{F \geq f_\alpha\}$ (la notation K_α^+ signifie qu'on ne décrit ici qu'une seule des deux parties de la région critique K_α, la partie supérieure).
   Décision du test au niveau $\alpha = 0.05$. La valeur expérimentale est $f_{\mathrm{e}} = \dfrac{(\widehat{s}_A^{\mathrm{e}})^2}{(\widehat{s}_B^{\mathrm{e}})^2} = \dfrac{3.027^2}{2.946^2} = 1.055$ est inférieure à f_α, donc $f_{\mathrm{e}} \notin K_\alpha$. Au niveau $\alpha = 5\%$, on conserve l'hypothèse H_0 : $\sigma_A = \sigma_B$.
2. Au vu des résultats des deux échantillons, au niveau $\alpha = 5\%$, peut-on considérer que le score moyen de la population B est inférieur au score moyen de la population A ? On procède à un test *orienté* de comparaison des moyennes, dans le cas de grands échantillons indépendants et d'écart-types égaux (en effet, le résultat de la question précédente permet de suppose $\sigma_A = \sigma_B$).
   Hypothèses. On désigne par μ_A et μ_B les moyennes des scores des deux populations A et B :

   $$H_0 : \mu_A = \mu_B, \quad H_1 : \mu_B < \mu_A.$$

Statistique du test. Les tailles des échantillons sont $n_A = 45 > 30$ et $n_B = 51 > 30$. Il s'agit donc de deux *grands échantillons indépendants*. Suivant le formulaire, on calcule le nombre

$$s = \sqrt{\frac{n_A\left(s_A^{\mathrm{e}}\right)^2 + n_B\left(s_B^{\mathrm{e}}\right)^2}{n_A + n_B - 2}} = \sqrt{\frac{45 \times 2.993^2 + 51 \times 2.917^2}{45 + 51 - 2}} = 2.984$$

et le nombre

$$s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} = 2.984\sqrt{\frac{1}{45} + \frac{1}{51}} = 0.610.$$

Les moyennes aléatoires M_{n_A} et M_{n_B} des scores des deux populations vérifient :

$$M_{n_A} - M_{n_B} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}\right) = \mathcal{N}\left(0, 0.610\right).$$

Remarque. Dans le formulaire, on dit que la variable $Z = \dfrac{M_{n_A} - M_{n_B}}{s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Cela revient exactement au même, on peut donc choisir l'une ou l'autre des deux formulations.

Région critique K_α au niveau $\alpha = 0.05$. La région critique K_α est ***unilatérale*** (puisque le test est orienté), et contient les "grandes" valeurs de $M_{n_A} - M_{n_B}$ (puisque, si H_1 est vérifiée, les valeurs de M_{nA} sont plus grandes que celles de M_{n_B}). Elle est donc de la forme $K_\alpha = \{M_{n_A} - M_{n_B} \geq m_\alpha\}$, avec $\mathbb{P}[K_\alpha] = 0.05$. On trouve, à l'aide de la fonction InvN ou FracNormale de la calculatrice, $m_\alpha = 1.004$. Donc

$$K_\alpha = \{M_{n_A} - M_{n_B} \geq 1.004\}.$$

Décision du test au niveau $\alpha = 0.05$. La valeur expérimentale est $m_A^{\mathrm{e}} - m_B^{\mathrm{e}} = 1.271 \geq 1.004$. Elle appartient donc à K_α : au niveau d'erreur 5%, on accepte donc l'hypothèse H_1 qui dit que le score moyen de la population B est significativement inférieur au score moyen de la population A.

Correction de l'Exercice 3. Un groupe de 10 sujets entreprend sur une période de six mois un programme d'enrichissement cognitif destiné à améliorer leurs processus de traitement de l'information. Pour évaluer l'effet du programme, on fait passer aux sujets deux tests de niveaux comparables l'un avant, l'autre après la période d'apprentissage, dont voici les scores :

Scores AVANT	5	2	8	9	5	3	2
Scores APRÈS	6	2	9	10	6	1	3
D	-1	0	-1	-1	-1	2	-1

A l'aide d'un test paramétrique de comparaison, décider au niveau $\alpha = 5\%$ si les sujets ont en moyenne amélioré leur processus de traitement de l'information après le programme d'enrichissement cognitif.

On procède à un test *orienté* de comparaison des moyennes pour deux petits échantillons appariés. C'est typiquement le cas d'un *même* échantillon, observé *avant* et *après* une expérience particulière (ici, le progamme d'enrichissement collectif).

Hypothèses. Formulées "en français", les hypothèses du test sont :

H_0 : le programme d'enrichissement cognitif ne change rien aux capacités de traitement de l'information.

H_1: le programme d'enrichissement cognifif améliore les capacités de traitement de l'information.

On désigne par X les scores de la population avant le programme d'enrichissement collectif et par Y les scores de la population après le programme. On désigne par μ_X la moyenne des scores de la population avant le programme et par μ_Y la moyenne des scores de la population aprè s le programme. Alors :

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y, \quad H_1 : \mu_X < \mu_Y.$$

Statistiques du test. On est en train de procéder à un test de comparaison des moyennes de deux petits échantillons $(n = 7 < 30)$. On pose $D = X - Y$ et on désigne par $M_n(D)$ la moyenne aléatoire de la variable D, et par $S_n(D)$ l'écart-type aléatoire de D, avec $n = 7$.

Sous l'hypothèse nulle, on a, d'après le formulaire :

$$T = \frac{M_n(D)}{s_n(D)/\sqrt{n-1}} \hookrightarrow \mathrm{St}(n-1),$$

c'est à dire

$$T = \frac{M_n(D)}{s_n(D)/\sqrt{6}} \hookrightarrow \mathrm{St}(6).$$

Région critique K_α au niveau $\alpha = 0.05$. Il s'agit dune région critique ***unilatérale***, faite des valeurs négatives de T (puisque, sous l'hypothèse H_1, la moyenne de X est inférieure à la moyenne de Y). Puisque la table de la loi de Student ne donne que des valeurs positives, on trouve à la ligne 6, la valeur 1.9432. Comme nous travaillons avec des valeurs négatives, nous obtenons $t_\alpha = -1.9432$ et $K_\alpha = \{T \leq -1.9432\}$.

Décision du test. Pour déterminer la valeur expérimentale, on calcule la moyenne m_e et l'écart-type s_e de D sur l'échantillon. On trouve $m_\mathrm{e} = -0.429$ et $s_\mathrm{e} = 1.050$. La valeur expérimentale est le nombre

$$t_\mathrm{e} = \frac{m_\mathrm{e}}{s_\mathrm{e}/\sqrt{n-1}} = \frac{-0.429}{1.050\sqrt{6}} = -1.001.$$

Ce nombre est supérieur à $t_\alpha = -1.9432$, donc $t_\mathrm{e} \notin K_\alpha$. On déduit que, au niveau d'erreur $\alpha = 5\%$, on conserve l'hypothèse H_0 : le programme d'enrichissement cognitif n'a significativement pas d'efficacité.